เรื่องน่าอ่าน
ดร.ปัญญา เปรมปรีดิ์

ประโยชน์ที่แฝงมากับ ตัวเลขสุ่ม

ลองฝึกการเก็งกำไร ให้ได้รายรับสูงสุด ด้วยการใช้ตัวเลขสุ่ม

ผู้เขียนเคยกล่าวถึงตัวเลขสุ่ม (Random Number) ในเกมบางชนิดมาแล้ว แต่ยังไม่เคยกล่าวถึงรายละเอียดว่าตัวเลขสุ่มนี้มีลักษณะเป็นอย่างไร และใช้ประโยชน์อะไรได้บ้าง คราวนี้เราจะพิจารณากันอย่างลึกซึ้งสักที

ชนิดของตัวเลขสุ่ม

ขั้นแรกเราควรทำความเข้าใจกับลักษณะของตัวเลขสุ่มเสียก่อน ตัวเลขสุ่มนั้นมี 3 รูปแบบใหญ่ ๆ รูปแบบแรกคือเป็นตัวเลขดิจิตโดด ๆ ที่เขียนเรียงเป็นแถว ยกตัวอย่างเช่น 100973253 37652013586346735487680959091 17392927494537542...ตัวเลขเหล่านี้ถ้าลองกวาดสายตาดูจะพบว่าไม่มีความสัมพันธ์ระหว่างดิจิตเลย ดิจิต 3 ตัวแรกอาจทำให้เราคิดว่ามีลักษณะความสัมพันธ์กัน เช่น เลข 0 ติดกันสองตัว แต่กลับไม่มีเลข 0 อยู่ติดกันอีกในช่วงสั้น ๆ นอกจากนั้นแล้วหากสังเกตให้ดีจะเห็นว่าอัตราการเกิดของดิจิตต่าง ๆ นั้นมีจำนวนเท่ากัน โดยการนับความถี่ของจำนวนดิจิต 0, 1, 2,...9 หรือพูดง่าย ๆ คือถ้าเราดึงออกมาทีละคู่ เราจะได้ตัวเลขที่มีค่าตั้งแต่ 00 จนถึง 99 และการเกิดของตัวเลขเหล่านี้จะมีโอกาสเท่า ๆ กัน เรื่องนี้จะเห็นได้ชัดเจนเมื่อเราใช้ตัวอย่างที่ยาวกว่านี้ ความจริงข้อนี้พิสูจน์ได้ในตำราประเภทสถิติ เช่น เรื่อง Concepts of Statistical Inference โดย William C. Guenther ของสำนักพิมพ์ McGraw-Hill Book Company ปี 1965 เนื้อหาภายในประกอบด้วยตารางตัวเลขสุ่มที่มีความยาวถึง 1 ล้านดิจิต จับคู่ได้ 5 แสนคู่ หรือจับคู่แบบต่อเนื่องและวนย้อนกลับได้ถึง 1 ล้านคู่ การจับคู่ต่อเนื่องนั้นผู้เขียนหมายถึงการจับตัวที่ 1 คู่กับตัวที่ 2 แล้วจับตัวที่ 2 คู่กับตัวที่ 3 จับตัวที่ 3 คู่กับตัวที่ 4 ตัวเลขเหล่านี้ถ้านับจำนวนครั้งที่เกิดขึ้นเรียกว่า "ความถี่ของการเกิด" (Frequency of occurance) จะมีค่าใกล้เคียงกัน

หากเราจับตัวเลขสุ่มแบบดิจิตต่อเนื่องมาดูทีละดิจิต 2 ดิจิตหรือ 3 ดิจิต...จำนวนความถี่ของการเกิดตัวเลขเหล่านั้น (ความยาว) จะเท่ากัน นั่นเป็นลักษณะอย่างหนึ่งของตารางตัวเลขสุ่ม แต่มีผู้เตือนไว้ล่วงหน้าว่าตารางตัวเลขสุ่มที่สมบูรณ์จริง ๆ อาจไม่เคยปรากฏในโลกนี้ เพราะตัวเลขชนิดนี้ต้องยาวไม่มีที่สิ้นสุด ตารางใดมีจำนวน

ดิจิตจำกัดย่อมไม่สามารถรักษาคุณสมบัติข้อที่ว่า "มีความถี่เท่า ๆ กัน" เมื่อเราสังเกตทีละหลาย ๆ ดิจิต เช่น ในตารางขนาด 1 ล้านดิจิต ถ้าจับมาทีละ 6 ดิจิตแบบต่อเนื่อง แล้ววนกลับมาที่หัวของตาราง จะได้ตัวเลขยาว 6 หลักเป็นจำนวน 1 ล้านตัว แต่ตัวเลข 6 หลักนั้นจะมีค่าตั้งแต่ 000000 ถึง 999999 ซึ่งรวมกันได้พอดี 1 ล้านตัว ถ้าความถี่เท่ากันจะต้องเกิดอย่างละ 1 ครั้งเท่ากันหมด ซึ่งผู้เขียนไม่เชื่อว่าจะเป็นไปได้ อาจจะมีบางตัวเลขเกิดซ้ำ บางตัวเลขไม่เกิดเลย และจากจุดนี้ถ้าเราดูทีละ 7 ดิจิตคงบอกได้ว่าไม่มีทางรักษาคุณสมบัติข้อนี้ไว้ได้

ตัวเลขสุ่มแบบที่ 2 เป็นตารางหรือเครื่องมือที่จะสร้างและส่งมอบตัวเลขจำนวนเต็มที่มีค่าตั้งแต่ 0 จนถึง n อัตราการเกิดขึ้นของแต่ละค่าในกลุ่มนี้จะมีความถี่ใกล้เคียงกัน ยกตัวอย่างเช่น 100, 09, 25, 01, 17, 20, 05, 24,... ตัวเลขเหล่านี้อาจบอกไม่ได้ว่าเป็นเลขสุ่มที่มีค่าระหว่างเท่าใดถึงเท่าใด ต้องศึกษาจากตัวอย่างหลาย ๆ แบบ แล้วแจงนับความถี่และตรวจสอบว่าโอกาสของการเกิดเลขสองตัวเท่ากับเท่าไร ถ้ามีค่าใกล้เคียงกันตลอดแสดงว่าตารางนี้เข้าลักษณะตัวเลขสุ่ม ตัวอย่างนี้ผู้เขียนสร้างจากตารางตัวอย่างแรก โดยจับมาทีละคู่และเก็บไว้เฉพาะตัวเลขที่มีค่าระหว่าง 00 ถึง 25 คู่ไหนมีค่ามากกว่า 25 ก็ทิ้งไป นี่คือวิธีการหนึ่งที่เราจะสร้างตัวเลขสุ่มที่มีค่าระหว่าง 0 ถึง n

ตัวเลขสุ่มแบบที่ 3 เป็นแบบมีจุดทศนิยม เป็นตารางหรือเครื่องมือในการสร้างตัวเลขที่มีค่าตั้งแต่ 0.0 ถึง 0.9999... อัตราการเกิดของตัวเลขเหล่านี้จะมีค่าเท่า ๆ กัน คำจำกัดความแบบนี้อาจเข้าใจยากสักหน่อย เพราะตัวเลขจุดทศนิยมนั้นมีจำนวนนับไม่ถ้วน แล้วใครจะเช็คความถี่ของการเกิดของตัวเลขเหล่านี้ได้ ลักษณะที่แท้จริงของคำว่า "สุ่ม" มีความหมายว่าตัวเลขที่เราได้รับแต่ละครั้ง "คาดเดาไม่ได้" แต่ "โอกาสที่จะไปตกที่ค่าใดนั้นย่อมเท่าเทียมกัน" โดยจะเน้นเรื่องโอกาสและการคาดเดาไม่ได้ ซึ่งคุณสมบัติข้อนี้ใช้กับตัวเลขสุ่มทุกชนิดที่กล่าวมาทั้งหมด

สาเหตุที่ผู้เขียนแยกตัวเลขสุ่มออกเป็น 3 ประเภทก็คือ

1. ในตำราต่าง ๆ มักมีตารางตัวเลขสุ่มแบบที่ 1 เท่านั้น

2. พวกภาษาโปรแกรม เช่น เบสิกและปาสคาลจะมีฟังก์ชันที่ให้ตัวเลขสุ่มแบบที่ 2 และ 3 เท่านั้น เช่น ในภาษาปาสคาลเขียนว่า X: = RANDOM; และ I: = RANDOM (N); ตามลำดับ

3. เมื่อเข้าใจตัวเลขสุ่มแบบที่ 1 แล้วจะเข้าใจแบบที่เหลือได้ง่าย

ลองสร้างตัวเลขสุ่ม

วิธีการสร้างตัวเลขสุ่มที่นิยมใช้กันทั่วไปได้แก่ เริ่มจากเลขจำนวนเต็ม (Integer) ตัวหนึ่งความยาวพอสมควรและต้องมีดิจิตสลับแบบสุ่มบ้าง เช่น 6847927686461628 เมื่อตั้งขึ้นมาแล้วก็ทำการคูณกับตัวเอง ตัดส่วนหัวและท้ายของผลลัพธ์ที่ได้ออกไปด้านละ 1 ส่วน 4 จำนวนตัวเลขจะมีความยาวเท่ากับตัวเริ่มต้น คูณตัวเลขใหม่ซ้ำอีกครั้งด้วยวิธีการเดิม ถ้าเราทำอย่างนี้เรื่อย ๆ เราจะได้ตัวเลขที่สามารถวางต่อกันเป็นตารางตัวเลขสุ่มแบบที่ 1 เพื่อทำการสร้างตัวเลขสุ่มแบบที่ 2 กับ 3 ได้ (โดยเลือกทีละ n ดิจิตตามขนาดที่ต้องการ)

สิ่งที่กล่าวมาทั้งหมดนี้คือวิธีการสร้างตัวเลขสุ่ม แต่เวลาทำงานจริงนั้นเราไม่จำเป็นต้องสร้างและเก็บตารางแบบที่ 1 ไว้ เราจะสร้างและใช้งานตามความจำเป็นของโปรแกรม เช่น ถ้าต้องการเลขสุ่มที่มีค่าระหว่าง 00 ถึง 25 เราก็นำตัวเลขเริ่มต้นคูณกันเองแล้วตัดหัวท้ายทิ้ง ใช้ผลลัพธ์ใหม่แทนตัวเลขเริ่มต้น แล้วหยิบมาดูทีละ 2 ดิจิต หากได้ค่าระหว่าง 00 ถึง 25 รูทีนนี้จะส่งค่าดังกล่าวให้โปรแกรมของเรา ถ้าดูจนหมดแล้วยังใช้ไม่ได้ให้ดึงตัวเลขที่อยู่แทนที่ตัวเริ่มต้นคูณตัวเองและตัดหัวตัดท้ายอีกที ทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ เราจึงไม่ต้องเก็บตารางแบบที่ 1 ไว้

ตัวเลขยาว ๆ ที่ใช้เป็นตัวเลขเริ่มต้นเรียกว่า "เมล็ดพันธุ์" หรือ "Seed" ซึ่งปกติจะเริ่มที่ค่าอันหนึ่งเหมือนเดิมทุกครั้งที่ตั้งต้นใช้โปรแกรม ดังนั้นตัวเลขสุ่มที่สร้างขึ้นจะเข้ารูปแบบเดิมเสมอ เมื่อมีการเปลี่ยนจุดเริ่มต้น เราต้องใช้ฟังก์ชันอีกอันหนึ่ง ในภาษาปาสคาล

ใช้คำว่า RANDOMIZE; เรื่องนี้เป็นเรื่องสำคัญมากสำหรับโปรแกรมเล่นเกมเพื่อมิให้ผู้เล่นจับทิศทางได้ โปรแกรมจึงต้องทำงานไม่เหมือนเดิม

ตัวเลขสุ่มหมายถึงตัวเลขที่ถูกสร้างขึ้นแล้วส่งออกมาทีละตัว โดยที่เราไม่สามารถคาดเดาได้เลยว่าค่าของตัวเลขจะเป็นเท่าใด เพียงแต่จะอยู่ในขอบเขตหรือชนิดที่เรากำหนด เมื่อสำรวจสถิติระยะยาวนานแล้วจะทราบผลว่าความถี่ของการเกิดจะเท่า ๆ กัน

ประโยชน์ใช้สอย

ประโยชน์ใช้สอยประการแรกก็คือใช้เพื่อบอกว่าเรื่องราวที่เราจำลองนั้นได้เกิดเหตุการณ์ใด ยกตัวอย่างเช่น การโยนหัวโยนก้อย ถ้าใช้เหรียญเดียวจะมีเหตุการณ์เกิดขึ้นได้ 2 อย่างคือ "ออกหัว" หรือ "ออกก้อย" การเกิดเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งเราอาจใช้เหตุผลแล้วสรุปได้ว่ามีโอกาสเท่ากัน เพราะเหรียญปกตินั้นมีรูปร่างหน้าตาเหมือนกัน ขอบตั้งฉากกับตัวเหรียญ น้ำหนักอยู่ตรงกลาง การหมุนของเหรียญในอากาศและบนพื้นจะสมดุลย์ ฯลฯ ดังนั้นโดยทั่วไปแล้วเหรียญจะออกหัวและก้อยได้เท่า ๆ กัน จากสมมติฐานนี้เราสามารถใช้ตัวเลขสุ่มเป็นตัวช่วยจำลองเหตุการณ์ได้

ภาพจำลองการโยนเหรียญดังกล่าวอาจทำได้มากมายหลายวิธี เช่น จากตารางตัวเลขสุ่มเราอาจบอกว่า "ดึงออกมาทีละตัว ถ้าได้เลขคู่เป็นหัว เลขคี่เป็นก้อย" แต่เราอาจกำหนดว่า "เลข 0 เป็นหัว เลข 9 เป็นก้อย เลขอื่นให้ข้ามไป" ถูกต้องทั้ง 2 วิธี เพราะเลขคู่กับเลขคี่และเลข 0 กับเลข 9 นั้นจะมีความถี่ใกล้เคียงกันสามารถนำมาใช้

จำลองเหตุการณ์ "การโยนหัวโยนก้อย" ได้ ข้อควรสังเกตอยู่ที่ว่า เหตุการณ์จำลองที่เกิดขึ้นจาก 2 วิธีนี้จะไม่ตรงกันหรือไม่ตรงกับการใช้เหรียญจริง แต่ทั้งหมดนี้มีลักษณะที่คล้ายกัน ซึ่งเราคาดเดาไม่ได้

สำหรับผู้ที่ยังสงสัยอยู่ ผู้เขียนจะแสดงการใช้กฎเกณฑ์แบบแรกเป็นตัวจำลองภาพ ลองกลับไปไล่ตัวเลขสุ่มที่เคยยกตัวอย่าง 1009732533765201... ถ้าใช้กฎเกณฑ์เลขคู่เลขคี่หมายความว่าการโยนเหรียญครั้งที่ 1 ให้ผลเป็น "ก้อย" เพราะดิจิตแรกคือ "1" โยนเหรียญครั้งที่ 2 กลายเป็น "หัว" เนื่องจากดิจิตที่ 2 เท่ากับ "0" ครั้งที่ 3 ก็เป็น "หัว" อีกทั้งนี้เพราะดิจิตที่ 3 คือ "0" ฯลฯ

การจำลองเหตุการณ์โดยใช้ตัวเลขสุ่มช่วยประหยัดได้มาก ตัวเลขเพียงไม่กี่ตัวสามารถเล่าเหตุการณ์อย่างต่อเนื่องได้ง่ายกว่าการใช้เหรียญออกมาโยนจริง ๆ ความประหยัดจะเห็นได้ชัดยิ่งขึ้นเมื่อเรานำเหตุการณ์จำลองนั้นป้อนเข้าเครื่องคอมพิวเตอร์ เพื่อหาข้อสรุปบางประการให้เรา ถ้าเราต้องใช้วิธีโยนเหรียญ เราต้องมีโปรแกรมรับข้อมูลเข้าไป โยนเหรียญ 1 ทีก็จะได้ผล 1 ครั้ง แล้วอินพุตข้อมูลเข้าเครื่องคอมพิวเตอร์เท่ากับจำนวนครั้งที่โยน เราคงต้องใช้เวลาหลายวัน เพราะข้อสรุปของเราจะใกล้เคียงความจริง เมื่อป้อนข้อมูลมากกว่า 1,000 ครั้ง

ประเด็นที่น่าสนใจคือ มีข้อสรุปอะไรที่คอมพิวเตอร์จะทำให้เราได้บ้าง และเป็นข้อสรุปที่จะต้องทำการทดลองโยนเหรียญนับพัน ๆ ครั้ง

การจำลองภาพเหตุการณ์เป็นเพียงการสร้างบทละครโดยอาศัยตัวเลขค้นคว้าหาข้อสรุปบางอย่างที่ไม่ต้องลงมือทำเอง เรื่องแบบนี้มีอยู่มากมาย แต่เราอาจไม่ค่อยสนใจกันมาก่อน ผู้เขียนเป็นนักลองนักเล่นเลยมีหลายตัวอย่าง อาทิเช่น เรื่องการหาค่าของ π หลังจากที่ผู้เขียนจบการศึกษาใหม่ ๆ ผู้เขียนได้งานทำที่การพลังงานแห่งชาติ ซึ่งมีสำนักงานอยู่ที่เชิงสะพานยศเส สำนักงานนี้เคยเป็นวังเก่า มีห้องโถงใหญ่ตกแต่งภายในไว้สวยงามมาก ปูพื้นกระเบื้อง (เข้าใจว่ามาจากอิตาลี) แต่มีกระเบื้องแผ่นหนึ่งขนาดใหญ่พอสมควร กว้างยาวประมาณด้านละ 1 ฟุต ตรงกลางเป็นรูปวงกลมบรรจุไว้ในกรอบสี่เหลี่ยมจตุรัสคมชัดเจนดีมาก รูปวงกลมก็กลมจนหาที่ติไม่ได้ กระเบื้องแผ่นนี้อยู่ตรงศูนย์กลางของห้องโถม จึงดูเด่นเป็นสง่า จากรูปนี้ทำให้ผู้เขียนนึกอยากจะลองใช้ทฤษฎีทางด้านสถิติ โดยใช้วิธีโยนเหรียญสตางค์แดงไปยังกระเบื้องแผ่นนี้ เราจะมีอัตราส่วนระหว่างจำนวนครั้งที่ตกอยู่ในวงกลมเทียบกับจำนวน

ครั้งที่ตกอยู่ในกรอบสี่เหลี่ยมจตุรัสเป็นเท่าใด ก่อนโยนต้องยืนห่างพอสมควร ทั้งนี้เพื่อให้โอกาสที่เหรียญจะตกอยู่ที่จุดต่าง ๆ มีอัตราใกล้เคียงกัน สาเหตุที่เลือกใช้สตางค์แดงเพราะมันมีรูตรงกลางสำหรับมองพื้นผิวด้านล่าง การทดลองครั้งนั้นต้องใช้เวลาหลายวันตอนพักทานอาหารเที่ยง เพราะต้องโยนแบบสุ่ม ส่วนใหญ่จะตกนอกกรอบสี่เหลี่ยมจตุรัส แต่ทุกครั้งที่ตกลงไปในกรอบสี่เหลี่ยมเราจะจดไว้

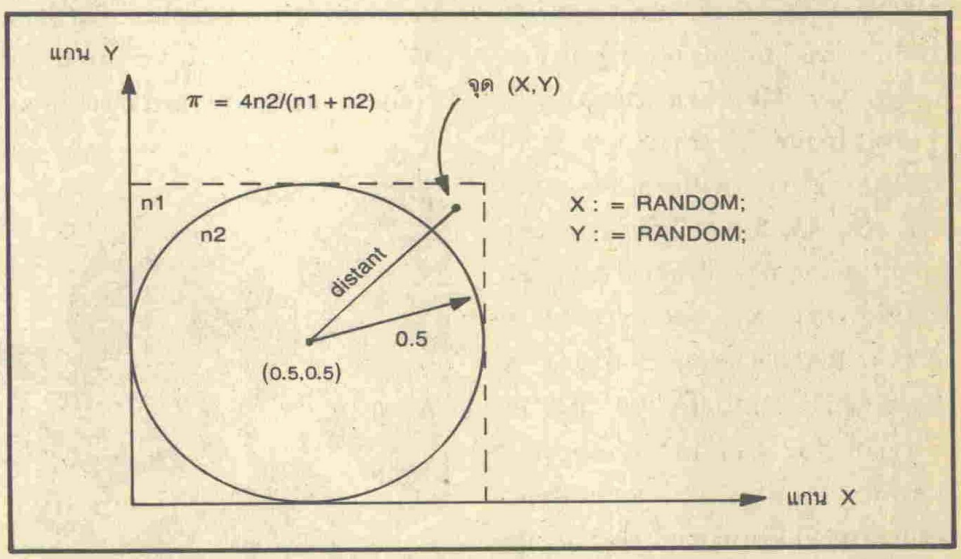
เหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นเมื่อรูตรงกลางของเหรียญไปตกในกรอบสี่เหลี่ยมนั้นมีอยู่ 2 แบบคือ "ตกกรอบสี่เหลี่ยมแต่ไม่อยู่ในวงกลม" และ "ตกในกรอบสี่เหลี่ยมและวงกลมด้วย" เรื่องนี้ถ้าให้ n1 และ n2 เป็นตัวเลขความถี่ที่นับได้ เราจะพบว่าอัตราส่วนระหว่าง n2 ต่อ (n1+n2) จะเท่ากับอัตราส่วนพื้นที่ของวงกลมต่อพื้นที่สี่เหลี่ยมจตุรัส หรือเขียนเป็นสมการได้ดังนี้ $n2/(n1+n2) = \pi r^2/(2r)^2$ หรือ $\pi = 4n2/(n1+n2)$ ค่านี้จะใกล้เคียงความจริงเมื่อ n1 และ n2 มีค่ามากพอสมควร ผู้เขียนต้องโยนไปมาหลายรอบ สมัยนั้นยังหนุ่มยังแน่นถือเป็นการออกกำลังกายหลังอาหารในตัว ผู้เขียนไม่ได้เก็บหลักฐานไว้แต่ผลที่ได้เป็นที่น่าพอใจมาก ค่าของ π นี้มิได้ใกล้เคียงกับค่าจริงในระดับ 3.1X ภายใน 2-3 วัน เมื่อทำไปนาน ๆ เข้ากับขยับขึ้นขยับลงอยู่แถวนั้นตลอด เรื่องนี้น่าจะเป็นเพราะการโยนเหรียญของผู้เขียนไม่ค่อยสม่ำเสมอ

ใช้คอมพิวเตอร์ผ่อนแรง

ทั้งหมดนี้เป็นตัวอย่างการหาข้อสรุปโดยการทดลองซ้ำ ๆ ซึ่งให้ผลดีพอสมควร แต่ใช้เวลาและแรงงานสูง

ทำให้พนักงานหลายคนร่ำลือกันว่าในห้องโถงใหญ่มีผีดุ เพราะปกติเขาจะปิดห้องไว้ไม่ให้ใครใช้งาน ผู้เขียนได้แก้ไขใหม่ทันทีที่เริ่มมีไมโครคอมพิวเตอร์ช่วยลดเวลาการทดลองและไม่ต้องเหนื่อยด้วย โดยวิธีการดังนี้ ให้ X เป็นตัวแปรทางแกนนอน Y เป็นตัวแปรในแกนตั้ง ถ้าเราสร้างตัวเลขสุ่มแบบมีทศนิยมขึ้นมา 2 ตัว แล้วใส่ค่าที่ X และ Y เราจะพบว่าจุด (X,Y) นี้จะอยู่ภายในกรอบสี่เหลี่ยมจตุรัสซึ่งกำหนดโดย {0<X<1.0,0<y<1.0} รูปสี่เหลี่ยมจตุรัสสามารถบรรจุวงกลมที่มีรัศมี 0.5 หน่วยได้พอดี จุดศูนย์กลางของวงกลมจะอยู่ที่จุด (0.5,0.5) จากนี้เราลองหาระยะห่างระหว่างจุด (X,Y) กับ (0.5,0.5) ที่คำนวณได้จากการนำผลบวกกำลังสองของระยะห่างทางแกน X และแกน Y มาถอดรูตสอง เราก็จะทราบว่าจุด (X,Y) อยู่ในวงกลมหรือไม่ ถ้าระยะห่างน้อยกว่า 0.5 แสดงว่าตกอยู่ในวงกลม นั่นคือจุด (X,Y) จะอยู่ในวงกลมเมื่อ $0.5\times0.5 > (X-0.5)\times(X-0.5)+(Y-0.5)\times(Y-0.5)$ หลังจากนั้นนำ 1 บวกกับ n1 หรือ n2 แล้ววนกลับไปสร้างตัวเลขสุ่มให้กับ X และ Y ใหม่อีก ทำแบบนี้สัก 100 ครั้งก่อนคำนวณค่า π เสียทีหนึ่ง เราจะพบว่าค่า π จะใกล้เคียงความจริงเมื่อ (n1+n2) มีค่ามากขึ้น แต่ไม่ดีกว่า 3.1X ทั้งนี้เพราะการกระจายของตัวเลขไม่สมบูรณ์เท่าใดนัก รูปที่ 1 แสดงหลักการคำนวณค่า π โดยการจำลองเหตุการณ์ดังกล่าว รูปที่ 2 แสดงตัวอย่างโปรแกรมในภาษาปาสคาลเพื่อการคำนวณ

จากตัวอย่างนี้เราสามารถใช้เลขสุ่มช่วยจำลองเหตุการณ์ แล้วหาข้อสรุป



รูปที่ 1 หลักการคำนวณค่า π โดยประมาณด้วยการจำลองเหตุการณ์

```
PROGRAM RN1S01;
VAR X, Y, N1, N2, SUM, PHI: REAL;
VAR I, K: INTEGER;
BEGIN
     CLRSCR;
     N1:=0.0; N2:0.0;
     FOR I:=1 TO 24 DO
          BEGIN
          FOR K:=1 TO 100 DO
               BEGIN
               X:=RANDOM; Y:=RANDOM;
               SUM:=(X-0.5)x(X-0.5)+(Y-0.5)x(Y-0.5);
               IF 0.25>SUM THEN N2:=N2+1.0
                    ELSE N1:=N1+1.0;
                    END;
               PHI:= 4.0xN2/(N1+N2);
               WRITELN ('PHI=', PHI:8:5);
               END;
          END.
```

รูปที่ 2 โปรแกรมตัวอย่างการหาค่าโดยประมาณของ PHI โดยใช้การจำลองเหตุการณ์

ได้หลายประเด็น เช่น การโยนเหรียญ 5 เหรียญนั้นจะมีโอกาสออก "หัว 2 ก้อย 3" เป็นกี่เปอร์เซ็นต์ และตัวเลขนี้จะใกล้เคียงกับตัวเลขทางทฤษฎีมากน้อยแค่ไหน เรื่องพวกนี้เขียนโปรแกรมได้ใน 1-2 ชั่วโมงและใช้เวลารัน 2-3 วินาทีเท่านั้น วิธีการนั้นไม่ยากเลย เราให้ X1, X2, X3, X4, X5 เป็นตัวเลขเพื่อบอกว่าเหรียญทั้ง 5 จะออกหัวหรือก้อย เราใช้สูตรว่า X1: =RANDOM(2); X2: = RANDOM(2);... ค่าของ X ทั้ง 5 จึงมีได้ 2 อย่างคือ "0" กับ "1" ถ้าเราให้ "0" ตรงกับ "การออกหัว" และให้ "1" ตรงกับ "การออกก้อย" เราก็จะบอกได้ว่าเหรียญอันไหนเป็นหัว และเหรียญอันไหนเป็นก้อย แต่เหตุการณ์ที่เราสนใจคือ "ออกหัว 2 เหรียญ และออกก้อย 3 เหรียญ" ซึ่งจะพิจารณาได้ไม่ยาก เพราะจะตรงกับในกรณีที่ X1+X2+X3+X4+X5 มีค่าเท่ากับ 3 พอดี กรณีนี้เราต้องนับจำนวนครั้งเอาไว้ และ

วนทำหลาย ๆ รอบ แล้วหารด้วยจำนวนรอบ เราจะได้อัตราส่วนที่บอกโอกาสของการเกิดเหตุการณ์ "หัว 2 ก้อย 3" ตามต้องการ

ลองของจริง

คราวนี้คงพอมองเห็นเรื่องที่จะทดลองเล่น เพราะบางคนอาจเส้นลึกกว่านี้ เพียงแค่การจำลองภาพและพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ นั้นไม่สนุก หรือต้องการได้รับประโยชน์ในลักษณะที่เป็นเงินเป็นทองจริง ๆ ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดคือ "มอนติคาโล" ซึ่งนำไปประยุกต์ใช้ในธุรกิจการพนัน เราลองปูพื้นเกมง่าย ๆ เสียก่อนที่จะเข้าเรื่องการออกแบบตู้ม้าและตู้คันโยก แต่ใครจะทำขายก็ทำกันเอง ไม่ต้องโทรไปขอคำปรึกษา เพราะผู้เขียนไม่รับผิดชอบด้วย กลัวจะได้ที่นอนใหม่ในมุ้งสายบัว

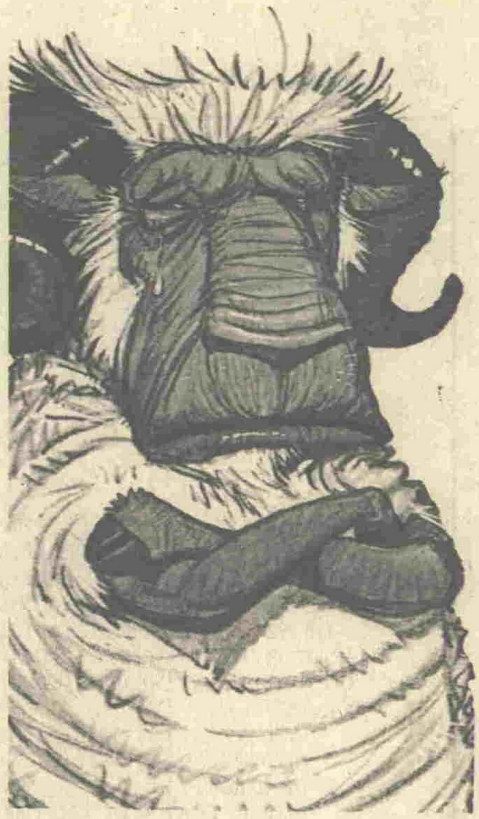
เราจะเริ่มจากเกม "ปั่นแปะ" เกมนี้ใช้เหรียญ 2 อัน การโยนนั้นดูเสมือนว่าเป็นการโยนแบบสุ่ม แต่แท้ที่จริงแล้วไม่ใช่ เจ้ามือสามารถควบคุมให้ออก "หัว" "กลาง" หรือ "ก้อย" ได้ และถ้าเจ้ามือมีความฉลาดก็จะจัดอัตราความถี่การเกิดเหตุการณ์เหล่านี้ให้อยู่ในสัดส่วน 2:3:2 ทั้งนี้เพราะที่จุดนั้นจะให้ผลในแง่อัตรากำไรสูงสุด พอเล่นไปนาน ๆ จะมีโอกาสขาดทุนมากกว่าเสมอตัว เรื่องนั้นพิสูจน์ได้ดังนี้ (ทฤษฎีนี้เรียกว่า MINIMAX)

สมมุติว่าเจ้ามือพยายามรักษาอัตราส่วนไว้เป็น n1, n2 และ n3 ตามลำดับ จากอัตราส่วนนี้ถ้าเรานำ (n1+n2+n3) หารตลอด แล้วให้ค่าเป็น p1, p2, p3 เราจะพบว่า p1, p2, p3 คือ "โอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์" หรือ "Probability ของการเกิดเหตุการณ์" ทั้งนี้เพราะ

p1 + p2 + p3 จะเท่ากับ 1.0 พอดี และแต่ละตัวจะมีค่าระหว่าง 0.0 ถึง 1.0

จากการที่ผู้แทงไม่ทราบว่าเจ้ามือจะออกอะไร เพราะมีทางเลือกหลายทาง บางคนพยายามแทงเสมอหน้ากัน คือหมุนเวียนตามสะดวก บางคนเน้นด้านใดด้านหนึ่ง ทั้งนี้เพราะอัตราการจ่ายสูง (2 เท่า) แต่บางคนบอกว่าการเลือกกลางนั้นมีโอกาสบ่อยกว่า เรื่องนี้เราสามารถพิสูจน์ในภายหลังได้ว่ายิ่งเล่นนานเท่าไรยิ่งจะขาดทุนทุกรายคนฉลาดที่สุด คือต้องพยายามแทงให้ได้ผลตอบแทนในระยะยาวสูงที่สุด เขาจะต้องเริ่มด้วยการกระจายการแทงในสัดส่วนประมาณ m1, m2 และ m3 ตามลำดับ จากตัวเลขนี้เราลองหาร (m1 + m2 + m3) ให้มีค่าเป็น q1, q2, q3 ตัวเลขทั้ง 3 นี้เป็นค่าประเภท "โอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์" เช่นกัน

การที่เจ้ามือพยายามออกหัว กลาง หรือก้อยในอัตราตามโอกาสเป็น p1, p2 หรือ p3 และผู้เล่นแทงอย่างใดอย่างหนึ่งใน 3 อย่างคือ q1, q2, q3 ดังนั้นโอกาสที่จะแทงหัวแล้วออกหัวพอดีนั้นจะเท่ากับ p1q1 แทงกลางแล้วออกกลางพอดีจะเท่ากับ p2q2 และแทงก้อยแล้วออกก้อยพอดีจะเท่ากับ p3q3 ตามลำดับ ส่วนคู่อื่น ๆ อีก 6 คู่นั้นจะเป็นการแทงผิด ต้องโดนเจ้ามือกินกล่าวอีกนัยหนึ่งคือถ้ามีการเล่น n ครั้ง และ n มีค่าสูงมาก เหตุการณ์จะแยกเป็น 9 หนทาง ได้แก่ แทงหัวออกหัว แทงหัวออกกลาง แทงหัวออกก้อย แทงกลางออกหัว แทงกลางออกกลาง... แทงก้อยออกก้อย ทั้งนี้จะมีความถี่ในอัตรา p1q1n, p2q1n, p3q1n, p1q2n, p2q2n,...p3q3n ตามลำดับ จาก 9 เหตุการณ์เราพบว่าผู้แทงเสียเงิน n บาท (แทงทีละบาท) แต่ได้เงินคืนมา



3p1q1n + 2p2q2n + 3p3q3n เพราะถ้าแทงหัว 1 บาทจะได้คืน 2 บาท และเมื่อรวมกับทุนที่จ่ายไปจะเป็น 3 บาท เราจึงนำ 3 คูณกับ p1q1n แต่เมื่อแทงกลางจะได้รับเพียงเท่าเดียว

สรุปแล้วผู้เล่นจะได้ผลตอบแทนในอัตรา = (3p1q1n + 2p2q2n + 3p3q3n) /n = 3p1q1 + 2p2q2 + 3p3q3 เรียกว่า "อัตราตอบแทนเฉลี่ย" หรือ "Expected Gain" ตัวเลขนี้ถ้ามากกว่า 1.0 แสดงว่ามีกำไร ถ้าเป็น 1.0 หมายถึงเสมอตัว ถ้าต่ำกว่า 1.0 ก็น่าจะเลิกเล่นไม่งั้นขาดทุนแน่เลย ผู้เล่นต้องการทำให้มีค่าสูงสุดแต่เจ้ามือกลับต้องการให้ได้ค่าต่ำสุด เราเรียกจุดที่สมดุลย์ว่าจุด MINIMAX เราสามารถหาได้ดังนี้

การที่หัวกับก้อยสลับกันได้ (symmetry) เราจึงอาจสมมติว่า ณ จุดสมดุลย์นี้ q1 = q3 และ p1 = p3 แล้วปรับฟังก์ชันเป็น = 6p1q1 + 2p2q2 และปรับสมการจาก q1 + q2 + q3 = 1.0 และ p1 + p2 + p3 = 1.0 เป็น 2q1 + q2 = 1.0 และ 2p1 + p2 = 1.0 ตามลำดับ ทำให้เราสามารถใช้ค่า q2 และ p2 จากสองสมการแทนค่าในฟังก์ชันได้เท่ากับ 6p1q1 + 2 (1.0-2p1) (1.0-2q1) ขั้นต่อไปก็หา Derivative เทียบกับ p1 และ q1 แล้วเซตให้เป็นศูนย์จะได้สมการ 2 แบบดังนี้

$$6q1-4(1.0-2q1)=0$$
$$6p1-4(1.0-2p1)=0$$

ทั้งสองสมการเราจะได้ผลว่า q1 = 2/7 และ p1 = 2/7 นำกลับไปแทนค่าเพื่อหา q2, q3, p2, p3 ได้ดังนี้ q2 = 3/7, q3 = 2/7, p2 = 3/7, p3 = 2/7 เมื่อหาค่า n1, n2, n3 และ m1, m2, m3 จะได้ 2:3:2 ณ จุดสมดุลย์ดังกล่าวค่าตอบแทนเฉลี่ยจะเป็น 3p1q1 + 2p2q2 + 3p3q3 = (3.2.2 + 2.3.3 + 3.2.2)/49 = 6/7 ต่ำกว่า 1.0 ขืนเล่นนาน ๆ มีแต่จะขาดทุน

สุ่มตัวเลขอย่างมีเชิง

การวิเคราะห์แบบนักวิชาการผู้เขียนเองยังไม่ค่อยชอบ แทบไม่น่าเชื่อว่าเจ้าตี๋ในซอยแถวบ้านจะวิเคราะห์ได้ถึงขนาดนี้ เจ้ามือปั่นแป๊ะย่อมสามารถสังเกตได้ หรือรับถ่ายทอดวิทยายุทธจากรุ่นพี่ว่า "อย่าปั่นตามยถากรรม จงพยายามให้ออกกลางน้อยกว่าปกติสักเล็กน้อย" โดยวางเหรียญบนฝ่ามือให้ขึ้นเป็นหัวทั้งคู่หรือก้อยทั้งคู่ แล้วกระดกมือเพื่อให้เหรียญทั้ง 2 ลอยขนานกันลงมาอย่างรวดเร็ว เหรียญจะมีโอกาสหมุนพลิกตัวเพียง 3-5 ครั้งเท่านั้น ความเร็วในการเอามือปิดทับและการวางมือขนานลงไปหรือวางอุ้งมือส่วน

หนึ่งสูงกว่าอีกส่วนหนึ่ง แต่โดยธรรมชาติแล้วถ้าพลิกเหรียญไม่เกิน 5 ครั้งจะได้ผลตามต้องการคือ "ออกกลางน้อยกว่าปกติเล็กน้อย"

ย้อนกลับมาเรื่องการใช้คอมพิวเตอร์และตัวเลขสุ่ม เรื่องนี้ง่ายมากถ้าเราอยากจะปั่นแปะให้ออกตัว กลางหรือก้อยในอัตราส่วน 2:3:2 เราเรียกตัวเลขสุ่มชนิดที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 6 หรือใช้คำสั่ง RN: = RANDOM(7); คำสั่งนี้จะให้ค่า RN เป็น 0, 1 หรือ 2...6 ในอัตราเท่า ๆ กัน เมื่อได้แล้วค่อยมาแบ่งเป็น 3 กลุ่มคือ ถ้า RN เท่ากับ 0 หรือ 1 แสดงว่าออกหัว ถ้า RN เท่ากับ 2, 3 หรือ 4 เป็นกลาง RN เท่ากับ 5 หรือ 6 แสดงว่าออกก้อย

โปรแกรม RN1S02.PAS ในรูปที่ 3 เป็นโปรแกรมสำหรับทดสอบการดูดเงินจากผู้เล่น โดยเริ่มให้เงิน "หน้าตัก" จำนวน 10,000 ยูนิต โปรแกรมจะใช้ตัวเลขสุ่มเพื่อปั่นเหรียญ ผลจะแสดงบนจอภาพด้านซ้ายมือสามารถมองเห็นได้ แล้วถามว่าเราจะแทงอะไรเป็นเงินเท่าไรได้ 2 แห่งในแต่ละครั้ง (ไม่มีใครแทงหมดทุกหน้า เพราะพิสูจน์ได้ว่าขาดทุน) เมื่อแทงแล้วเครื่องจะเคลื่อนผลจากด้านซ้ายของจอมาทางด้านขวา และคิดเงินตามโชคชะตาของเรา การที่ผู้เขียนกำหนดให้โปรแกรมแสดงผลก่อนแทงเพื่อแสดงความบริสุทธิ์ใจ เราสามารถทดสอบความซื่อตรงของโปรแกรมได้ แต่เวลาเล่นจริง ๆ เราต้องใช้กระดาษปิดผลการปั่นไว้ แล้วรอดูผลหลังจากแทงแล้ว ถ้าเล่นแบบตรงไปตรงมาจะพบว่า 10,000 ยูนิตอาจหมดได้ในเวลาไม่เกิน 70,000 ครั้ง หรือจะทดลองวิธีอื่นด้วย เช่น แทงหัวกลาง หรือ "กั๊ก" ตลอด จะพบว่าเราถูกดูดเงินเร็วกว่าการกระจายแทงหัว

รูปที่ 3 โปรแกรมทดสอบการดูดเงินของผู้เล่นปั่นแปะทั้งหลาย

```
PROGRAM RN1S02;
LABEL STARTING,MAINLOOP,EOJ;
VAR K,N1,N2,NARTAK,AMOUNT1,AMOUNT2:INTEGER;
VAR MESS1,MESS2:STRING[4];
VAR MESS3,MESS4:STRING[5];
VAR BET1,BET2:INTEGER;
VAR CH:CHAR;
BEGIN
STARTING:
   CLRSCR;
   RANDOMIZE;
   NARTAK:=10000;

MAINLOOP:
   CLRSCR;
   GOTOXY(30,2);WRITE('PUN-PAE GAME');
   GOTOXY(30,23);WRITE('NARTAK=',NARTAK:6);
   N1:=RANDOM(2);N2:=RANDOM(2);
   IF N1=0 THEN MESS1:='HEAD' ELSE MESS1:='TAIL';
   IF N2=0 THEN MESS2:='HEAD' ELSE MESS2:='TAIL';
   GOTOXY(3,5);WRITE('COIN NUMBER ONE = ',MESS1);
   GOTOXY(3,7);WRITE('COIN NUMBER TWO = ',MESS2);
   REPEAT
     GOTOXY(3,13);WRITE('CHOOSE YOUR FIRST BET     ');
     GOTOXY(3,14);WRITE('  <1=HEAD,2=MIX,3=TAIL>   ');
     READ(BET1);
     UNTIL (BET1=1) OR (BET1=2) OR (BET1=3);
   REPEAT
     GOTOXY(3,15);WRITE('HOW MUCH TO BET ?         ');
     GOTOXY(3,16);WRITE('  <1..',NARTAK,'>         ');
     READ(AMOUNT1);
     UNTIL (AMOUNT1>=1) AND (AMOUNT1<=NARTAK);
   NARTAK:=NARTAK-AMOUNT1;
   GOTOXY(30,23);WRITE('NARTAK=',NARTAK:6);
   REPEAT
     GOTOXY(3,17);WRITE('CHOOSE YOUR SECOND BET    ');
     GOTOXY(3,18);WRITE('  <1=HEAD,2=MIX,3=TAIL>   ');
     READ(BET2);
     UNTIL (BET2=1) OR (BET2=2) OR (BET2=3);
   REPEAT
     GOTOXY(3,19);WRITE('HOW MUCH TO BET ?         ');
     GOTOXY(3,20);WRITE('  <0..',NARTAK,'>         ');
     READ(AMOUNT2);
     UNTIL (AMOUNT2>=0) AND (AMOUNT2<=NARTAK);
   NARTAK:=NARTAK-AMOUNT2;
   GOTOXY(30,23);WRITE('NARTAK=',NARTAK:6);
   MESS3:=' '+MESS1;MESS4:=' '+MESS2;
   FOR K:=21 TO 70 DO
     BEGIN
     GOTOXY(K,5);WRITE(MESS3);
     GOTOXY(K,7);WRITE(MESS4);
     DELAY(100);
     END;
   IF (BET1=1) AND (N1=0) AND (N2=0) THEN
       NARTAK:=NARTAK+3*AMOUNT1;
   IF (BET1=2) AND (N1=0) AND (N2=1) THEN
       NARTAK:=NARTAK+2*AMOUNT1;
   IF (BET1=2) AND (N1=1) AND (N2=0) THEN
       NARTAK:=NARTAK+2*AMOUNT1;
   IF (BET1=3) AND (N1=1) AND (N2=1) THEN
       NARTAK:=NARTAK+3*AMOUNT1;
   IF (BET2=1) AND (N1=0) AND (N2=0) THEN
       NARTAK:=NARTAK+3*AMOUNT2;
```

ปที่ 8 (ต่อ)

```
      IF (BET2=2) AND (N1=0) AND (N2=1) THEN
          NARTAK:=NARTAK+2*AMOUNT2;
      IF (BET2=2) AND (N1=1) AND (N2=0) THEN
          NARTAK:=NARTAK+2*AMOUNT2;
      IF (BET2=3) AND (N1=1) AND (N2=1) THEN
          NARTAK:=NARTAK+3*AMOUNT2;
      GOTOXY(30,23);WRITE('NARTAK=',NARTAK:6);
      GOTOXY(3,21);WRITE('<PRESS E TO END>');
      READ(KBD,CH);
      IF (CH<>'E') AND (NARTAK>0) THEN GOTO MAINLOOP;
EOJ:
   GOTOXY(3,24);WRITE('END OF JOB');
END.
```

กลาง ก้อยด้วยความถี่ 2:3:2

จากตัวอย่างโปรแกรมปั่นแปะคงทำให้ผู้อ่านพอมองเห็นลู่ทางการใช้ตัวเลขสุ่มควบคุมเครื่องเล่นประเภทอื่น เช่น ตู้ม้า เครื่องพวกนี้เปิดโอกาสให้เราเลือกแทงได้หลายแบบ อัตราการจ่ายไม่เหมือนกัน แถมมีการแทงเป็นตัวร่วม (Combination) ได้ด้วย จากอัตราการจ่ายแตกต่างกันนี้จะให้เครื่องทดลองจำลองภาพโดยกำหนดโอกาสที่แต่ละตัวจะชนะ แล้วตรวจสอบผลว่าถ้าเล่นหลายหมื่นครั้งจะมีกำไรหรือขาดทุน เมื่อได้แล้วก็เลือกตัวเลขบอกโอกาสที่จะให้ผลกำไรพอสมควร ค่าพวกนี้จะเซตไว้ในชิพเลยทีเดียว นอกจากนี้ยังมีการเก็บสถิติไว้เพื่อปรับชิพในอนาคตด้วย ตัวเลขบอกโอกาสชนะของม้าแต่ละตัวคือตัวเลขที่ชี้ว่าแต่ละวินาทีจะให้ม้าตัวไหนขยับขึ้น ตัวเลขสุ่มจะทำให้การเล่นแต่ละครั้งไม่เหมือนกัน แต่ผลโดยส่วนรวมจะเป็นไปตามโปรแกรมที่ตั้งไว้

สรุปท้าย

ก่อนจบบทความนี้จะกล่าวถึงการใช้เลขสุ่มในงานค้นคว้าและวิจัยเสียหน่อย หลักการมีอยู่ว่าระบบงานหรือ

ระบบเครื่องมือเครื่องจักรใหญ่ ๆ นั้นเกิดจากการกระทำขององค์ประกอบเล็ก ๆ น้อย ๆ หลายชิ้น องค์ประกอบเหล่านี้มีคุณสมบัติประจำตัวที่พอจะศึกษาและจดไว้ให้ องค์ประกอบจำนวนมากจะทำงานแบบสุ่ม เราไม่สามารถควบคุมได้โดยตรง และเมื่อนำมาประกอบเป็นระบบใหญ่แล้วเราคงเดาไม่ออกเลยว่าการทำงานเป็นอย่างไร ยกตัวอย่างเช่น กลุ่มก๊าซอุณหภูมิสูงที่บรรจุอยู่ในหลอดสุญญากาศและลอยอยู่ในอวกาศที่ไร้น้ำหนัก ก๊าซที่บรรจุอาจมี 3-4 ชนิด แต่ละชนิดจะมีคุณสมบัติไม่เหมือนกัน แต่เรารู้ว่าก๊าซบางชนิดจะทำปฏิกิริยากับอีกชนิดหนึ่งที่อุณหภูมิและแรงดันอย่างหนึ่ง เรื่องนี้เราสามารถจำลองภาพเหตุการณ์ได้ การคำนวณต้องละเอียดและกระทำกับทุกโมเลกุล การจัดภาพเริ่มต้นนั้นต้องใช้ตัวเลขสุ่ม โอกาสที่จะเกิดปฏิกิริยาต้องใช้การคำนวณและตัวเลขสุ่มเป็นเครื่องบอกว่า "เกิดหรือไม่เกิด" งานแบบนี้ต้องใช้เครื่องที่มีความเร็วสูง คำนวณกันนานเป็นวัน ๆ แต่อาจได้ภาพเหตุการณ์เพียง 2-3 นาทีเท่านั้น การจำลองภาพจะทำหลาย ๆ ครั้งแล้วนำผลมาเปรียบเทียบกัน ผลจะปรากฏให้เราทราบว่า "ส่วนใหญ่จะเกิดผลอย่างนี้...หรืออย่างนั้น...หรืออย่างโน้น" โปรแกรมแบบเดียวกันนี้อาจช่วยในการศึกษาผลกระทบต่อสัตว์และสิ่งแวดล้อมเมื่อเราสร้างเขื่อนหรือเปลี่ยนแปลงบางส่วนของพื้นที่ได้ งานพวกนี้ผู้เขียนคิดว่าน่าสนุกจริง ๆ

แต่...ทั้งหมดนี้ตั้งอยู่บนรากฐานความรู้เรื่องตัวเลขสุ่มเท่านั้นเอง เรื่องของตัวเลขสุ่มจึงเป็นเรื่องที่มีคุณประโยชน์มหาศาล